

REGELSYSTEME

S. RYFFEL

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einführung	3
1.1. Grundelemente in Regelsystemen	3
1.2. Reglerentwurfszyklus	3
2. Modellierung von dynamischen Systemen	3
2.1. Modellierungsverfahren	3
2.2. Vorgehen	3
2.3. Mechanische Systeme	4
2.4. Elektrische Systeme	4
2.5. Elektromechanische Systeme	4
2.6. Verfahrenstechnische Systeme	4
2.7. Wärme- und Strömungseffekte	4
2.8. Numerische Lösung von DGS	4
3. Das dynamische Verhalten von Systemen	6
3.1. Lineare Systeme	6
3.2. Laplace Transformation	6
3.3. Laplace Rücktransformation	7
3.4. Blockdiagramme	8
3.5. Systemantworten	8
3.6. Spezifikation im Zeitbereich	11
4. Regelkreis	13
4.1. Störgrößenverhalten	13
4.2. Sensitivität	13
4.3. Dynamisches Verhalten	13
4.4. Der klassische PID-Regler	13
5. Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols	13
5.1. Sprungmethode	13
5.2. Schwingmethode	14
5.3. Methode von Aström und Hagglund	15
6. Antiwindup	15
7. Stabilität	15
7.1. Interne Stabilität	15
7.2. IO-Stabilität	17
7.3. Folgerungen	17
8. Frequenzgang	17
9. Stabilität im Frequenzbereich	17
9.1. Bode Stabilitätskriterium	17
9.2. Nyquist Stabilitätskriterium	17
10. Stabilitätsmasse	20
10.1. Gain Margin und Phase Margin	20
10.2. GM und PM als Entwurfskriterien	21
10.3. Bode's Betrag / Phase Gesetz	22
11. Dynamische Kompensation	23

11.1. PD Kompensation	23
11.2. Lead-Kompensation	23
11.3. PI-Kompensation	24
11.4. Lag-Kompensation	24
11.5. PID Kompensation	24
12. Nicht minimalphasige Elemente	25
12.1. Totzeit	25
12.2. Nullstellen in RHE	26
12.3. Totzeitkompensator	26
13. Erweiterungen der Regelungsstruktur	27
13.1. Störgrössenaufschaltung (Feedforward Control)	27
13.2. Kaskadenregelung	27
14. Mehrvariablenregelung	28
14.1. Kopplungsmass: Relative Gain Array	28
14.2. Entkopplungskompensator	28
15. Zustandsraumdarstellung	28
15.1. Regelungsnormalform	28
15.2. Beobachternormalform	30
15.3. Modalform	31
15.4. Zustandstransformation	33
15.5. Verlust der Steuerbarkeit / Beobachtbarkeit	33
15.6. Zerlegung nach Kalman	33
15.7. Eigenwerte und Pole	33
15.8. Nullstellen in der ZSR	33
16. Reglerentwurf im Zustandsraum	33
16.1. Zustandsrückführung	33
16.2. Referenzsystem	34
16.3. Integralregelung	34
16.4. Zustandsschätzung, Beobachter	34
16.5. Dualität	35
16.6. Zustandsrückführung mit Beobachter	35
16.7. Referenzsystem	36
16.8. LQ-Regulator	36

1. EINFÜHRUNG

1.1. Grundelemente in Regelsystemen.

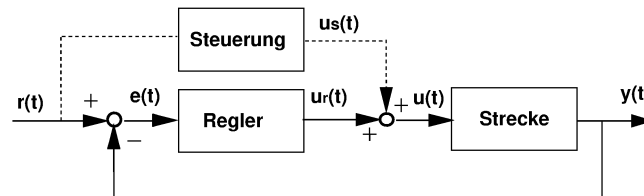


ABBILDUNG 1. Kombination von Regelung und Steuerung

$r(t)$: Sollwert, reference

$e(t) = r(t) - y(t)$: Abweichung, Fehler

$u(t)$: Eingang, Stellgrösse, manipulated variable

$u_r(t)$: Eingang basierend auf Rückführung

$u_s(t)$: Eingang basierend auf $r(t)$

$y(t)$: Ausgang, Regelgrösse, controlled variable. Ziel: $y(t) \approx r(t)$

Ziel der Regelung: Kompensation von Unsicherheiten

Problem: Verstärkungsfaktor ($u(t) = \alpha e(t)$) nicht beliebig gross \rightarrow Stabilitätsproblem!

Theorie: Gute Regelqualität ohne Probleme

1.2. Reglerentwurfszyklus.

- (1) Regelungsziele festlegen
- (2) Regelgrößen identifizieren
- (3) Spezifikation für die Variablen aufstellen
- (4) Systemkonfiguration ermitteln, Aktuator finden
- (5) Modellbildung und Parameteridentifikation
- (6) Reglerstruktur und -parameter festlegen
- (7) Optimierung der Parameter und Analyse der Performance

2. MODELLIERUNG VON DYNAMISCHEN SYSTEMEN

2.1. Modellierungsverfahren.

fundamental model: Aufstellen der grundlegenden physikalischen Gesetze und konstruktiven Zusammenhänge

black box model: Anpassen von mathematischen Beschreibungen an experimentelle Daten

2.2. Vorgehen.

- (1) Aufstellen der Bauteilgleichungen
Benutze dynamische Variablen als Zustandsvariablen (v_C, i_L, x, φ).
- (2) Aufstellen der Kopplungsgleichungen
Kraftgleichgewicht, Momentgleichgewicht, Massenerhaltung, ...
- (3) Umformen und Verknüpfung der DGL
Erstelle für jede Zustandsvariable eine DGL der Form $\dot{x} = f(x, \dots)$

2.3. Mechanische Systeme.

	Bauteilgleichungen	Kopplungsgleichungen
Translation	Massenträgheit $F = m\ddot{x}$	Kraftgleichgewicht $\sum_i F_i = 0$
	Federkraft $F = kx$	
	Dämpfung $F = d\dot{x}$	
Rotation	Trägheitsmoment $M = J\ddot{\varphi}$	Momentgleichgewicht $\sum_i M_i = 0$
	Federkraft $M = k\varphi$	
	Trockene Reibung $M = d\dot{\varphi}$	

2.4. Elektrische Systeme.

	Bauteilgleichungen	Kopplungsgleichungen
Widerstand	$u = Ri$	Maschengleichung $\sum_i u_i = 0$
	$i = u/R$	Knotengleichung $\sum_i i_i = 0$
Induktion	$u = L\dot{i}$	
	$i = \dot{Q}$	
Kapazität	$u = Q/C$	
	$i = C\dot{u}$	
Operationsverstärker	$u_{\text{Eingang}} = 0$	

2.5. Elektromechanische Systeme.

Gleichstrommotor	Antriebsmoment $T = K_t i_a$
	indizierte Spannung im Motor $u = K_e \dot{\theta}_m$

2.6. Verfahrenstechnische Systeme.

Bauteilgleichungen	Kopplungsgleichungen
abh. von Aufgabe	Energieerhaltung $\sum_i E_i = 0$ $E_{\text{drin}} = E_{\text{zu}} - E_{\text{ab}}$
Wärmezufluss $\dot{Q}_{\text{in}} = c m T(t)$	Stoffhaltung $\sum_i M_i = 0$ $M_{\text{drin}} = M_{\text{zu}} - M_{\text{ab}}$
	$\dot{M}_{\text{drin}} = w_{\text{zu}} - w_{\text{ab}}$

2.7. Wärme- und Strömungseffekte.

Bauteilgleichungen	Kopplungsgleichungen
Thermospannung $U = \gamma * T$	Wärmeenergiefluss $\frac{E}{t} = C_s \cdot \dot{T}_s = m_s \cdot c_{vs} \cdot \dot{T}_s$ $C_s \cdot \dot{T}_s = w_s \cdot c_{vs} \cdot (T_{s,in} - T_{s,out})$ w_s : Massestrom c_{vs} : spezifische Wärmekapazität $T_{s,*}$: Temperaturen $C_s = m_s \cdot c_{vs}$
Wärmeübertragung $\frac{E}{t} = \frac{\Delta T}{R}$	
Bernullgleichung $\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho gh = const$ $\rightarrow v = \sqrt{2gh}$	
Massefluss $w = \rho Av$	

2.8. Numerische Lösung von DGS.

Standardformat, Vektorschreibweise:

$$\dot{x} = f(x, t)$$

Transformation eines DGS in Zustandsraumdarstellung
 Prinzip: 1 DG 1 n-ter Ordnung \Rightarrow n DG 1-ter Ordnung
 Definiere Zustandsvektor

$$x_{i+1} = x^{(i)}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

Transformiere System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du' \end{cases}$$

- x : Zustandsvektor
- u : Eingangvektor
- y : Ausgangsvektor
- A : Systemmatrix
- B : Eingangsmatrix
- C : Ausgangsmatrix
- D : Durchgangsmatrix

2.8.1. Linearisierung.

Taylor-Reihenentwicklung von $f(x)$ um den Punkt \bar{x}

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(\bar{x}) + \left. \frac{df}{dx^T} \right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) \\ &\approx f(\bar{x}) + J|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) \quad \text{mit Jacobi Matrix } J = \frac{\partial f}{\partial x^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Linearisierung eines DGS um x_s, u_s

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_s, u_s) &= 0 && \Rightarrow \text{stationärer Zustand } x_s, u_s \\ \dot{x} &= \underbrace{f(x_s, u_s)}_{=0} + A(x - x_s) + B(u - u_s) && \text{mit } A = \left. \frac{\partial f}{\partial x^T} \right|_{x=x_s}, B = \left. \frac{\partial f}{\partial u^T} \right|_{u=u_s} \\ &\Rightarrow \dot{x} = \Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta u \\ y &= \underbrace{h(x_s, u_s)}_{y_s} + C(x - x_s) + D(u - u_s) && \text{mit } C = \left. \frac{\partial h}{\partial x^T} \right|_{x=x_s}, D = \left. \frac{\partial h}{\partial u^T} \right|_{u=u_s} \\ &\Rightarrow \Delta y = C\Delta x + D\Delta u \end{aligned}$$

2.8.2. Analytische Lösung der linearen Zustandsgleichung.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Homogener Teil

$$\begin{aligned} \dot{x} = Ax &\Rightarrow x(t) = e^{At}c \\ e^{At} &= I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Inhomogener Teil

Annahme: $x(t) = e^{At}c(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ae^{At}c(t) + e^{At}\dot{c}(t) \\ &= Ax + Bu\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

2.8.3. *Numerische Integration der Zustandsgleichung.*

$$\dot{x} = f(x)$$

Euler's Methode: Annahme, dass \dot{x} konstant bleibt

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t f(x_i)$$

Runge Kutta 2. Ordnung: Trapezmethode

$$k_1 = f(x_i)$$

$$k_2 = f(x_i + k_1\Delta t)$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t}{2}(k_1 + k_2)$$

3. DAS DYNAMISCHE VERHALTEN VON SYSTEMEN

3.1. Lineare Systeme.

System ist linear, wenn der Eingang $\{au_1(t) + bu_2(t)\}$ den Ausgang: $\{ay_1(t) + by_2(t)\}$ erzeugt.

Faltung

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad g: \text{Impulsantwort}$$

$$y = u * g$$

wenn System und $u(t)$ kausal ($g(t) = 0, u(t) = 0$ für $t < 0$) gilt:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

3.2. Laplace Transformation.

3.2.1. *Definition: einseitige Laplace-Transformation.*

$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \text{mit kausalem } f(t)$$

$$= \mathcal{L}\{f(t)\}$$

3.2.2. *Definition: inverse Laplace-Transformation.*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_c + j\omega}^{\sigma_c - j\omega} F(s)e^{st}ds$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

3.2.3. *Eigenschaften.*

Satz vom Anfangswert: $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+)$

Satz vom Endwert: $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

Achtung: kann nur angewendet werden, wenn $f(t)$ einen endlichen Endwert hat.

3.2.4. *Laplace Transformation und DG.*

$$\begin{array}{r} f(t) \\ \hline f(t) \\ f^{(n)}(t) \\ \int_{-\infty}^t f(\xi) d\xi \end{array} \quad \begin{array}{r} F(s) \\ sF(s) \\ s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n-1} s^{n-i} f^{(i)}(0) \\ \frac{1}{s} F(s) \end{array}$$

3.3. **Laplace Rücktransformation.**

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{p(s)}{q(s)} \right\} \quad \text{mit Polynomen } p(s), q(s)$$

$$q(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \cdots (s - \alpha_i)^j \cdots$$

Ordnung $p(s) \leq$ Ordnung $q(s)$

3.3.1. *Partialbruchzerlegung:*

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A_1}{s - \alpha_1} + \frac{A_2}{s - \alpha_2} + \frac{A_3}{s - \alpha_3} + \dots$$

Fall 1: Alle Wurzeln sind einfach

(1) Multipliziere mit $(s - \alpha_j)$:

$$(s - \alpha_j) \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A_1(s - \alpha_j)}{s - \alpha_1} + \dots + A_j + \dots + \frac{A_n(s - \alpha_j)}{s - \alpha_n}$$

(2) Setze $s = \alpha_j$

$$(s - \alpha_j) \frac{p(\alpha_j)}{q(\alpha_j)} = A_j$$

Fall 2: α_j ist k -fache Wurzel

(1) Multipliziere mit $(s - \alpha_j)^k$

$$(s - \alpha_j)^k \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A_1(s - \alpha_j)^k}{s - \alpha_1} + \dots + \sum_{i=1}^k \frac{A_{ji}(s - \alpha_j)^k}{(s - \alpha_j)^i} + \dots + \frac{A_n(s - \alpha_j)^k}{s - \alpha_n}$$

(2) Setze $s = \alpha_j$

$$A_{jk} = (s - \alpha_j)^k \frac{p(\alpha_j)}{q(\alpha_j)}$$

(3) Leite nach s ab

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{p(s)}{q(s)} \right] = \frac{d}{ds} \left[\frac{A_1(s - \alpha_j)^k}{s - \alpha_1} + \dots \right] + A_{j1}k(s - \alpha_j) + A_{j2} + \dots$$

(4) Setze $s = \alpha_j$, berechne A_{j2}

(5) Leite ab, bis alle A_{ji} berechnet sind.

Fall 3: Komplexe Wurzeln $as^2 + bs + c$

(1) Berechne zuerst alle restlichen Terme

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \dots + \frac{A_i s + B_i}{as^2 + bs + c} + \dots$$

(2) mache Zählervergleich mit $\frac{p(s)}{q(s)}$

3.3.2. Laplace Transformation.

$$\underbrace{Y(s)}_{\text{Ausgang}} = \underbrace{G(s)}_{\text{ÜF}} \underbrace{U(s)}_{\text{Eingang}}$$

ZSR:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

\mathcal{L} :

$$sX = AX + BU$$

$$Y = C(sI - A)^{-1}BU + DU$$

3.4. Blockdiagramme.

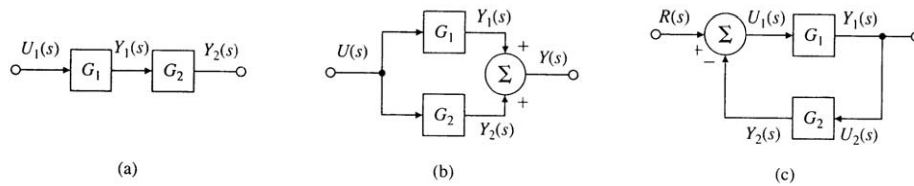


ABBILDUNG 2. seriell, parallel, rückführend

seriell: $Y = G_2 G_1 U_1$

parallel: $Y = (G_1 + G_2)U_1$

rückführend: $Y = \frac{G_1}{1+G_1 G_2} R$

$$Y = \frac{\text{ÜF}_{\text{forwärts zwischen Ein- und Ausgang}}}{1 - \text{ÜF}_{\text{im Kreis}}}$$

3.4.1. Blockdiagramm-Algebra.

Siehe Abbildung 3.

3.5. Systemantworten.

3.5.1. System 1. Ordnung.

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1} U(s)$$

k = Verstärkungsfaktor (gain)

τ = Zeitkonstante (time constant)

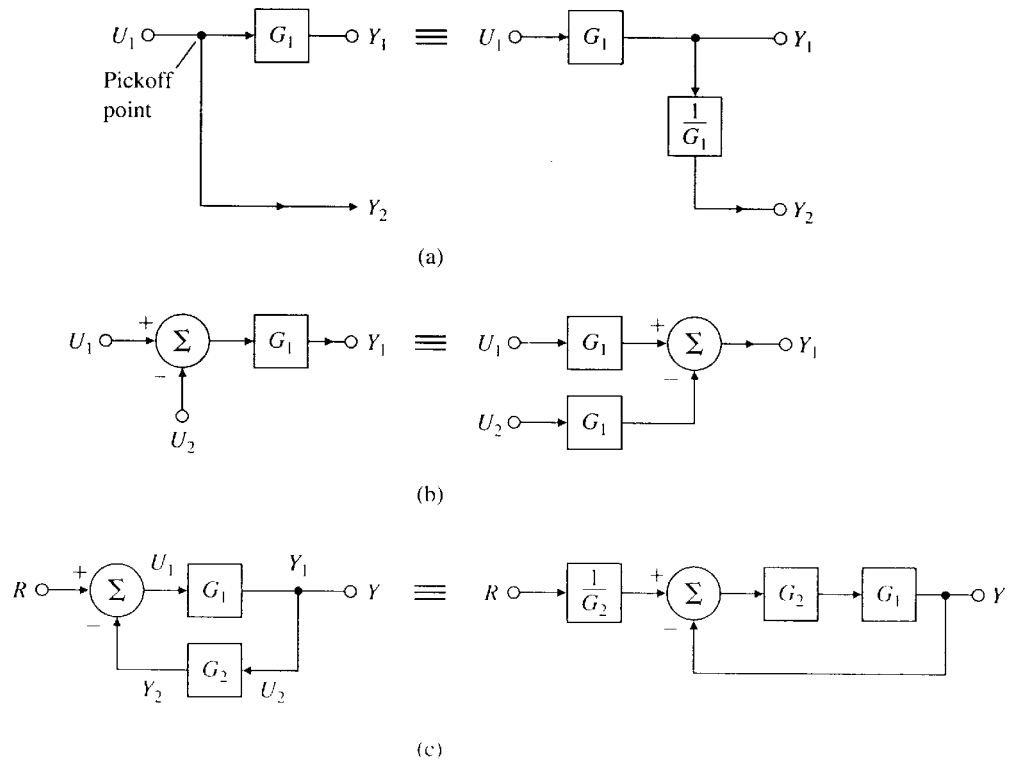
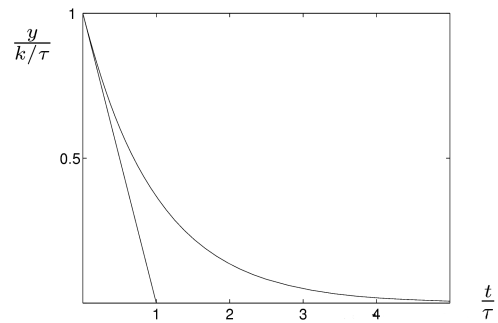


ABBILDUNG 3. erlaubte Umformungen

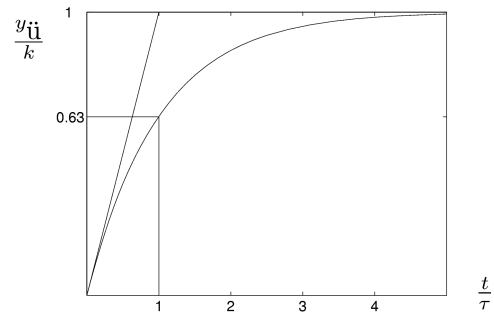
Impulsantwort

Impulsantwort $Y_i(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$
 Anfangswert $\frac{k}{\tau}$
 Endwert 0



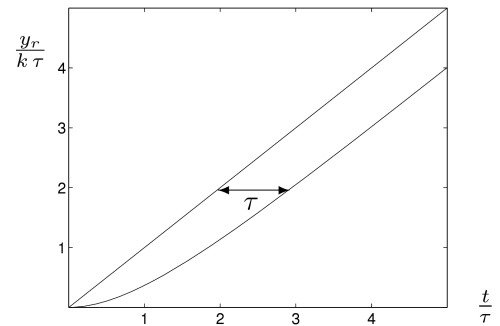
Sprungantwort, auch Übertragungsfunktion

Sprungantwort $Y_{\ddot{u}}(s) = \frac{k}{(\tau s + 1)s}$
 $y_{\ddot{u}}(t) = k(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$
 Anfangssteigung $\frac{k}{\tau}$
 Endwert k



Rampenantwort

Sprungantwort $Y_r(s) = \frac{k}{(\tau s + 1)s^2}$
 $y_r(t) = k(t - \tau - \tau \exp(-\frac{t}{\tau}))$
 Anfangssteigung 0
 Endsteigung k
 Endwert $k(t - \tau)$



3.5.2. System 2. Ordnung.

$$Y(s) = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \cdot U(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot U(s)$$

k = Verstärkungsfaktor (gain)

τ = Zeitkonstante (time constant)

ζ = Dämpfungskonstante (damping factor)

$\omega_n = \frac{1}{\tau} =$ Natürliche Frequenz (natural frequency)

Charakteristische Gleichung

$$\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{1}{\tau}(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) = -\omega_n(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad \text{Pole}$$

Siehe Abbildung 4

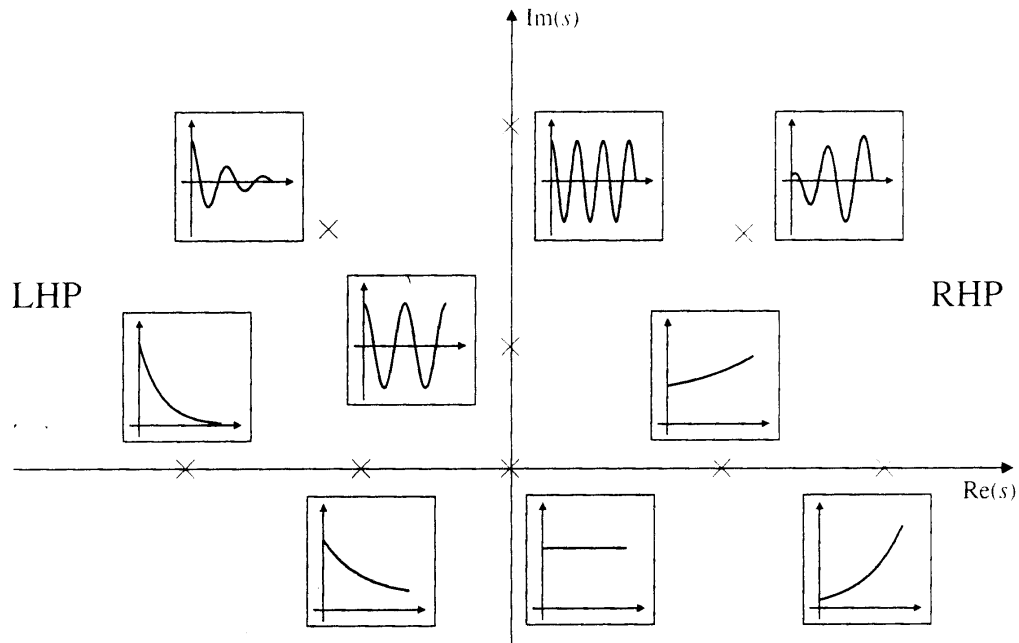


ABBILDUNG 4. Zeitfunktionen und ihre Pole

<p><i>gedämpft</i> $0 < \zeta < 1$ komplexe Wurzeln</p>	$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2} \frac{t}{\tau} + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)$	
<p><i>kritisch gedämpft</i> $\zeta = 1$ Doppelte Wurzel</p>	$y(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$	
<p><i>überkritisch gedämpft</i> $\zeta > 1$ Reelle Wurzeln</p>	$y(t) = 1 - \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} \exp\left(-\zeta \frac{t}{\tau}\right) \cosh\left(\sqrt{\zeta^2-1} \frac{t}{\tau}\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} \sinh\left(\sqrt{\zeta^2-1} \frac{t}{\tau}\right)$	

3.6. Spezifikation im Zeitbereich.

Anstiegszeit	(rise time)	$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}$	
Anregelzeit	(peak time)	$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$	
Überschwingen	(overshoot)	$M_p = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$	für $0 < \zeta < 1$
Ausregelzeit	(settling time)	$t_s \approx \frac{4.6}{\zeta\omega_n}$	
Abklingen		$\exp(-\zeta\omega_n t)$	
Resonanzfrequenz		$\omega_0 = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$	

Für Spezifikationen mit PM und GM siehe Kapitel 10.2 auf Seite 21.

3.6.1. *Pollage.*

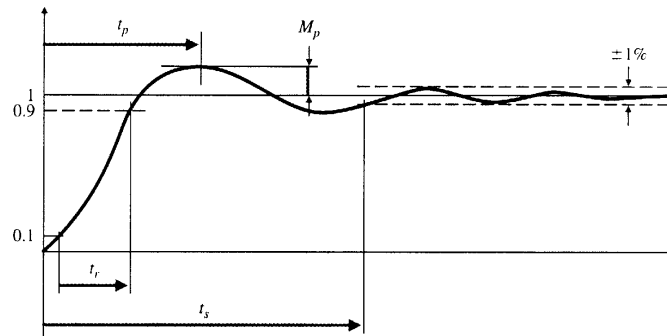


ABBILDUNG 5. Definition der Zeiten

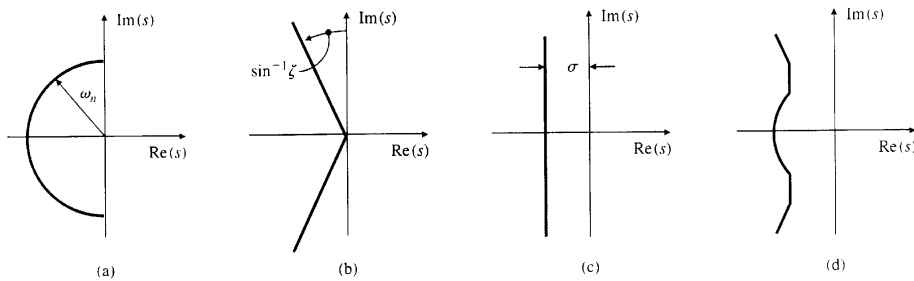


ABBILDUNG 6. Lage des Poles

- a) $t_r \leq t_{r0} \Rightarrow \omega_n \geq 1.8/t_{r0}$
 b) $M_p \leq M_{p0} \Rightarrow \sin^{-1} \zeta \geq \sin^{-1} \zeta_0$
 c) $t_s \leq t_{s0} \Rightarrow \text{Re}(s) \leq -\sigma_0 = -\frac{\zeta_0}{\tau_0} = -\zeta_0 \omega_0$

- Polstellen in der linken Halbebene sind gedämpft
- Polstellen nahe an der imaginären Achse sind langsamer und damit bedeutender für das dynamische Verhalten.
- Polstellen in der rechten Halbebene sind instabil

3.6.2. Systeme höherer Ordnung.

- Systeme 1. Ordnung in Serie

$$Y = \left(\frac{1}{\tau s + 1} \right)^n 1/s$$

Zeitkonstante des Gesamtsystems: Summe der Zeitkonstanten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\tau s/n + 1} \right)^n = e^{-\tau s}$$

3.6.3. Effekte zusätzlicher Pole und Nullstellen.

was	wo	Effekt
Ns	LHP	verstärkt Überschwingen, wenn weniger als Faktor vier vom Realteil der Pole entfernt
Ns	RHP	unterdrückt Überschwingen, evtl Unterschwingen
Pol		verlängert Anstigszeit, wenn weniger als Faktor vier vom Realteil der komplexen Pole entfernt.

4. REGELKREIS

System A mit Eingang r , Regelgrösse y , Fehler $w = y - r$, $W = B/A$ und Regler mit Verstärkung K .

4.1. Störgrössenverhalten.

Die Regelung reduziert die Auswirkung von Störungen um einen Faktor $1 + AK$.

closed loop gain: $\frac{1}{1+AK}$

return difference: $1 + AK$

beschreibt die Wirkung der Regelung: $y = r - (-AK)r = (1 + AK)r$

4.2. Sensitivität.

Wie wirkt sich eine Änderung δA im Modell A ($A_2 = A + \delta A$) auf das Gesamtsystem T aus?

$$S_A^T = \frac{\delta T}{T} / \frac{\delta A}{A}$$

$$S_A^{T_{Steuerung}} = 1$$

$$S_A^{T_{Regelung}} = \frac{1}{1 + AK}$$

4.3. Dynamisches Verhalten.

- K verändert Dynamik der *Steuerung* nicht
- K verändert Dynamik der *Regelung*:
 - schnellere Dynamik
 - schlechter gedämpft, sogar unstabil

4.4. Der klassische PID-Regler. Siehe Tabelle 1.

5. REGLERENTWURF NACH ZIEGLER-NICHOLS

5.1. Sprungmethode.

Ziel der Regelung: decay ratio = 0.25 ($\zeta = 0.21$)

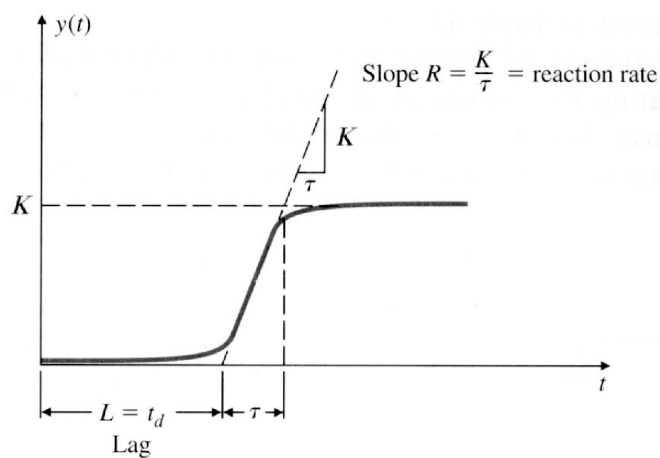
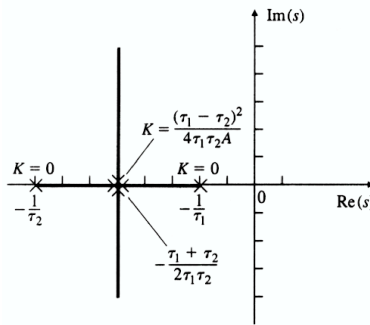


ABBILDUNG 7. Sprungmethode: Sprungantwort

P-Regler

$$u = K \cdot e$$

$$D(s) = K$$



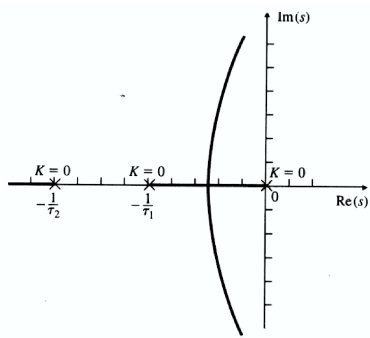
$0 < K < \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{4\tau_1\tau_2 A}$
 für K grösser wird die Anstiegszeit immer kleiner, die Dämpfung aber schlechter

I-Regler

$$u = \frac{K}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$$

$$D(s) = \frac{K}{T_I s}$$

T_I : Nachstellzeit
 $1/T_I$: reset rate



bleibender Reglerfehler immer null.
 für grosse K instabil

PI-Regler

$$u = K \left[e + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau \right]$$

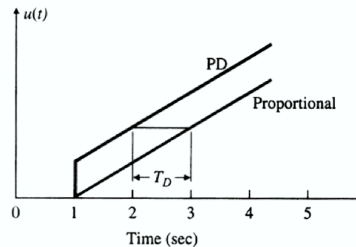
$$D(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

PD-Regler

$$u = K(e + T_D \dot{e})$$

$$D(s) = K(1 + T_D s)$$

T_D : Vorhaltezeit



rasche Veränderungen in e führen zu grossen Ausschlägen in u .
 empfindlich auf Messrauschen.

PID-Regler

$$u = K \left(e + \frac{1}{T_I} \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + T_D \dot{e} \right)$$

$$D(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

PID ist Industriestandard
 Für System 2. Ordnung alle Pole unabhängig wählbar.

TABELLE 1. Der klassische PID-Regler

Proportional	$K = 1/(RL)$
PI	$K = 0.9/(RL)$
	$T_I = L/0.3$
PID	$K = 1.2/(RL)$
	$T_I = 2 \cdot L$
	$T_D = 0.5 \cdot L$

5.2. Schwingmethode.

K_u	= Verstärkung
P_u	= Periode
Proportional	$K = 0.5 \cdot K_u$
PI	$K = 0.4 \cdot 5K_u$
	$T_I = 1/1.2 \cdot P_u$
PID	$K = 0.6 \cdot K_u$
	$T_I = 0.5 \cdot P_u$
	$T_D = 1/8 \cdot P_u$

5.3. Methode von Aström und Hagglund.

Siehe Abbildung 8.

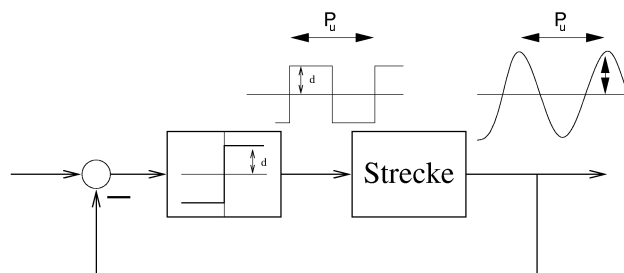


ABBILDUNG 8. Methode von Aström und Hagglund

$$K_u \approx \frac{4d}{\pi a}$$

6. ANTIWINDUP

Problem: Wenn u sättigt, kann u_c sehr gross werden. Siehe Abbildung 9.

7. STABILITÄT

7.1. Interne Stabilität.

System:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

stabil:

- alle "internen" Zustandsvariablen gehen für $t \rightarrow \infty$ gegen null.

- $\forall |x_0| < \varepsilon \Rightarrow |x(t)| < \delta$

- *Kriterium:*

Eig(A) in LHE

asymptotisch stabil:

- stabil und alle "interne" Zustandsvariablen werden nie unendlich.

- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

- *Kriterium:*

Eig(A) in offener LHE

alle Pole in der offenen LHE

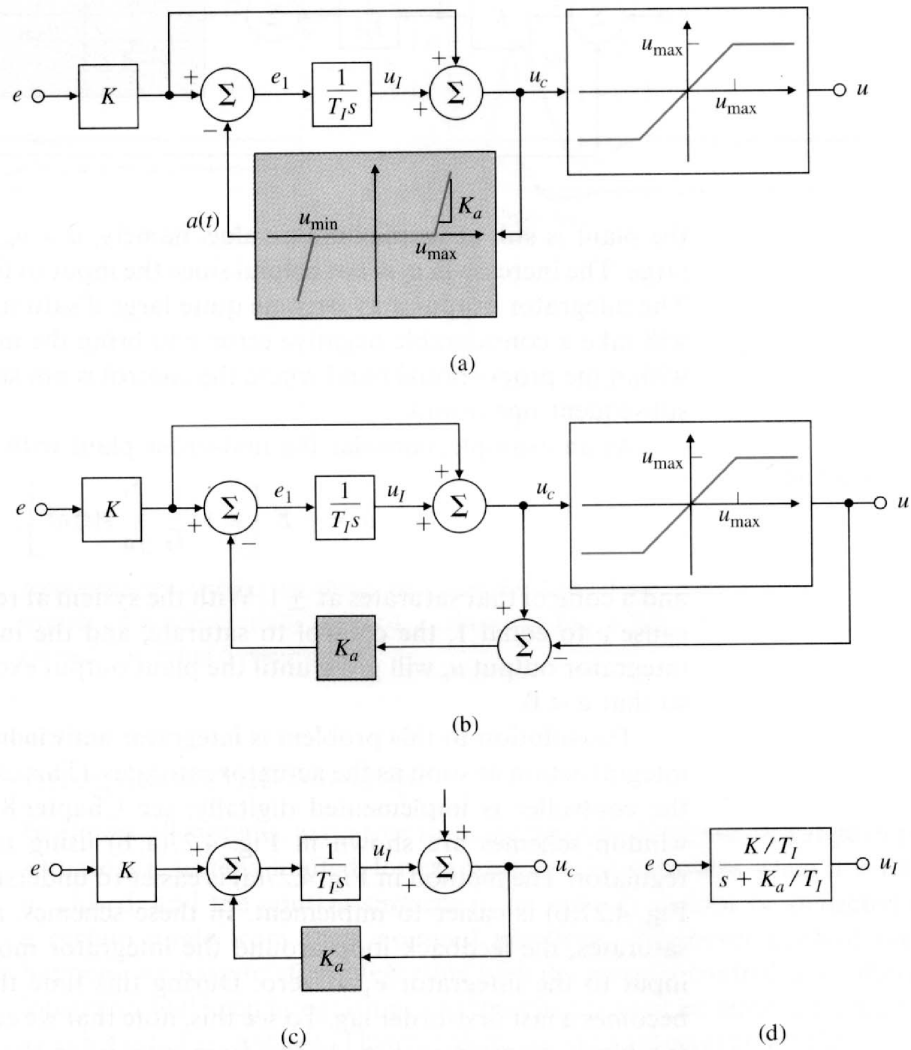


ABBILDUNG 9. Antiwindup, verschiedene Techniken

7.1.1. *Routh's Stabilitätskriterium.* Bestimme Wurzeln des charakteristischen Polynoms der Form:

$$a(s) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

Notwendige Bedingung für Stabilität: $a_i > 0$

Routh Tableau: Siehe Script S. 151

Row n	s^n :	1	a_2	a_4	...
Row $n-1$	s^{n-1} :	a_1	a_3	a_5	...
Row $n-2$	s^{n-2} :	b_1	b_2	b_3	...
Row $n-3$	s^{n-3} :	c_1	c_2	c_3	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
Row 2	s^2 :	★	★	0	...
Row 1	s^1 :	★	0	0	...
Row 0	s^0 :	★	0	0	...

Koeffizienten:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} \\ b_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1} \\ b_3 &= \frac{a_1 a_6 - a_7}{a_1} \\ c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \\ c_2 &= \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \\ c_3 &= \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \end{aligned}$$

- Alle Wurzeln sind nur dann in der LHE, wenn alle Elemente in der ersten Kolonne positiv sind.
- Die Anzahl Wurzeln in der RHE ist gleich der Anzahl von Vorzeichenänderungen in der ersten Kolonne.
- Wenn das erste Element einer Zeile null ist, ersetze das Element durch $\varepsilon > 0$ und setze fort. Wende das Stabilitätskriterium an für $\varepsilon \rightarrow 0+$.

7.2. IO-Stabilität.

$$\forall |y(t)| < \lambda$$

Kriterium: alle Pole von $G(s)$ in offener LHE

7.3. Folgerungen.

$$\begin{aligned} \text{intern asymptotisch stabil} &\iff \text{IO-stabil} \\ \text{intern stabil} &\Rightarrow \text{IO-stabil} \end{aligned}$$

8. FREQUENZGANG

$$\begin{aligned} \text{Amplitudenverhältnis} & |G(j\omega)| = \sqrt{G \cdot G^*} \\ \text{Phase} & \tan^{-1} \frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))} \\ \text{Bandbreite} & |G(j\omega_{\text{BW}})| = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3\text{dB} \end{aligned}$$

9. STABILITÄT IM FREQUENZBEREICH

9.1. Bode Stabilitätskriterium.

- *Annahme:* Amplitude und Phase des Frequenzganges des *offenen* Regelkreises sind stetig abnehmend
- *Stabilitätskriterium* des *geschlossenen* Regelkreises:

$$|KG(i\omega)| < 1 \text{ wo } \angle G(i\omega) = -180^\circ$$

- *Beobachtung:* System ist instabil, wenn Verstärkung zu gross ist.
Aber: System kann auch instabil werden, wenn sie zu klein ist. \rightarrow Nyquist.

9.2. Nyquist Stabilitätskriterium.

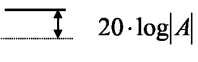
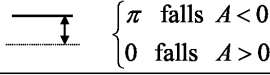
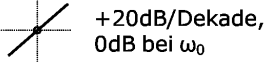

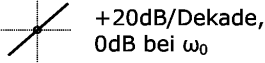

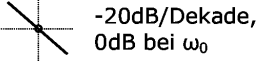

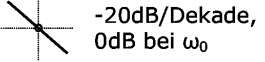
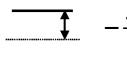
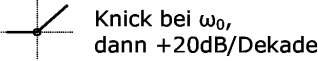

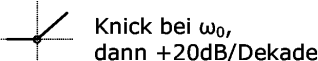
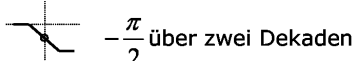
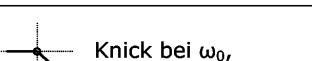

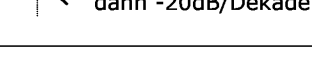

9.2.1. *Prinzip.* Eine rationale Funktion $\phi(s)$ hat:

Z: Nullstellen innerhalb von C

P: Pole innerhalb von C

Wenn wir die Kurve C im Urzeigersinn umfahren ist das Kurvenintegral:

$$2\pi(Z - P)$$

Übertragungsfunktion $H(j\omega)$	Amplituden-Frequenzgang $ H(j\omega) $ in dB	Phasen-Frequenzgang $\angle(H(j\omega))$
A (konstante)	 $20 \cdot \log A $	 $\begin{cases} \pi & \text{falls } A < 0 \\ 0 & \text{falls } A > 0 \end{cases}$
$j \frac{\omega}{\omega_0}$	 $+20\text{dB/Dekade,}$ $0\text{dB bei } \omega_0$	 $\frac{\pi}{2}$
$-j \frac{\omega}{\omega_0}$	 $+20\text{dB/Dekade,}$ $0\text{dB bei } \omega_0$	 $-\frac{\pi}{2}$
$j \frac{\omega_0}{\omega}$	 -20dB/Dekade, $0\text{dB bei } \omega_0$	 $\frac{\pi}{2}$
$-j \frac{\omega_0}{\omega}$	 -20dB/Dekade, $0\text{dB bei } \omega_0$	 $-\frac{\pi}{2}$
$\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)$	 Knick bei ω_0 , dann $+20\text{dB/Dekade}$	 $+\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\left(1 - j \frac{\omega}{\omega_0}\right)$	 Knick bei ω_0 , dann $+20\text{dB/Dekade}$	 $-\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$	 Knick bei ω_0 , dann -20dB/Dekade	 $-\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden
$\frac{1}{\left(1 - j \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$	 Knick bei ω_0 , dann -20dB/Dekade	 $+\frac{\pi}{2}$ über zwei Dekaden

$$\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + 1 \right]^{\pm 1}$$

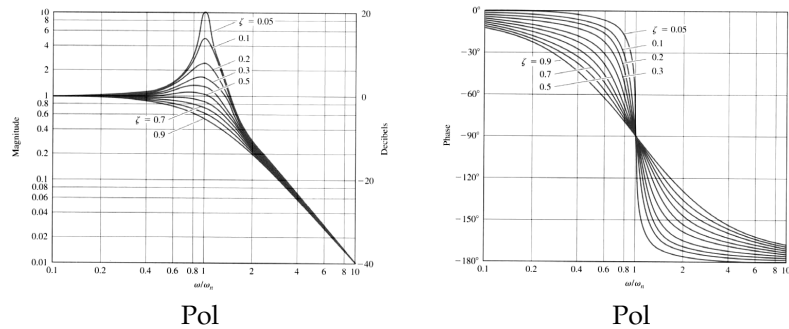


ABBILDUNG 10. Elementare Übertragungsfunktionen

9.2.2. Nyquist D Kurve.

Eigenschaften:

- D wird im Urzeigersinn umfahren und mit $G(s)$ (open loop) abgebildet.
- D darf keine Pole oder Nullstellen durchfahren.
- Abbildung ist winkeltreu:
 - Kreis auf Kreis abgebildet
 - rechter Winkel auf rechten Winkel

es sei:

F: Rückfuhrdifferenzfunktion $F(s) = 1 + KG(s)$

hat gleiches Nyquist-Diagramm wie $G(s)$, aber um 1 nach rechts verschoben und mit K skaliert.

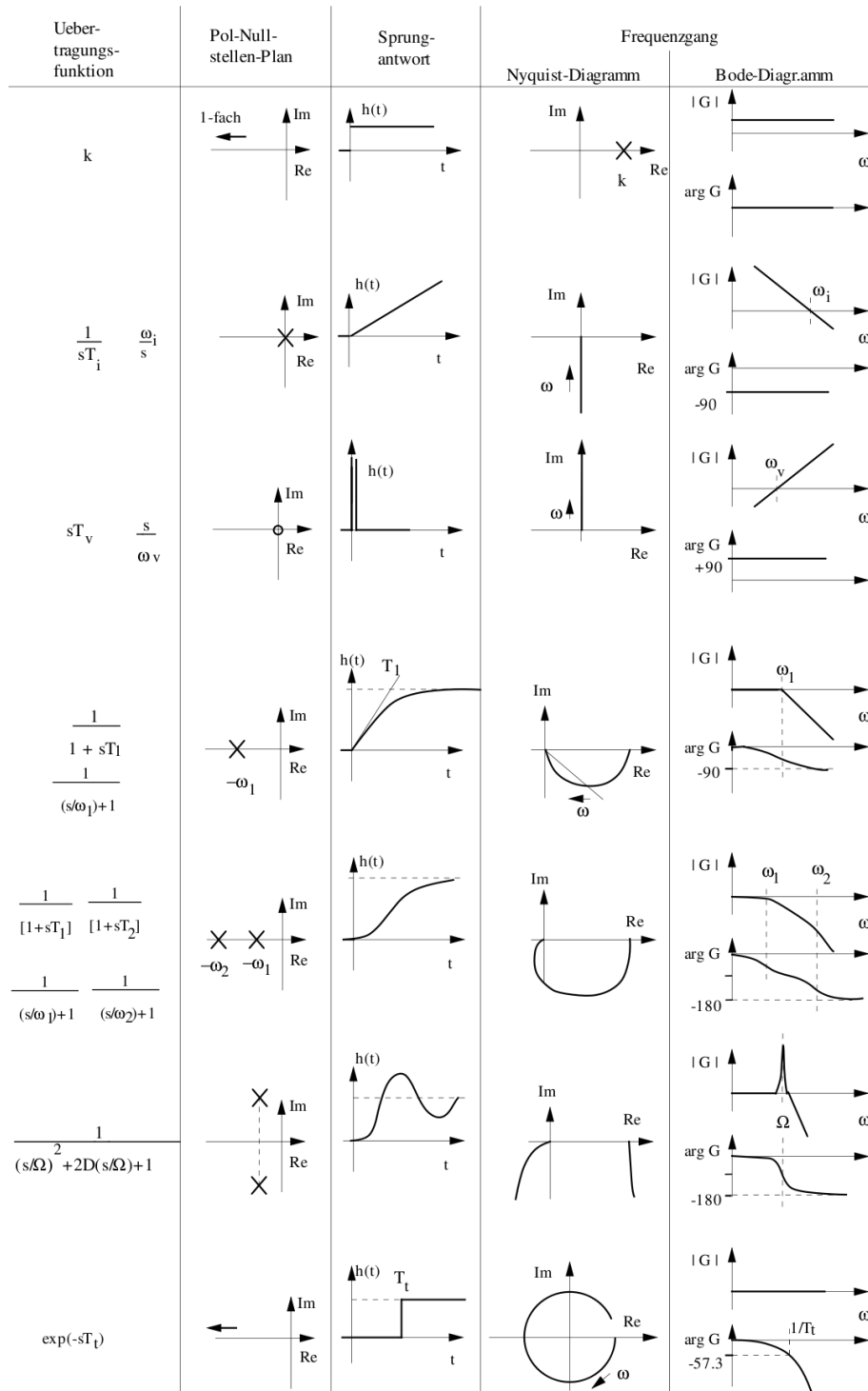
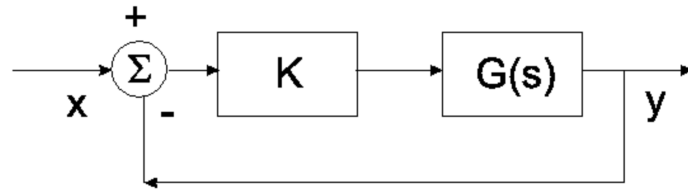
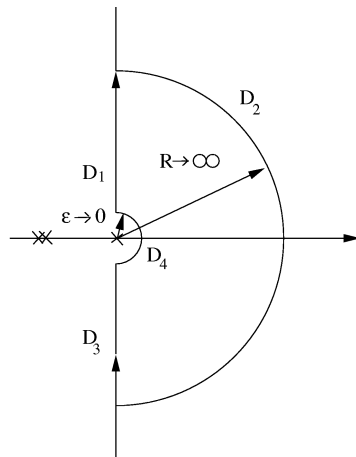


ABBILDUNG 11. Elementare Übertragungsfunktionen 2

Z: Nullstellen von $F(s)$ in RHE
 P: Pole von $F(s)$ in offener RHE



Abbildung



$D_1: G(i\omega)$

Meist die einzige relevante Strecke.

$D_2: \lim_{R \rightarrow \infty} G(Re^{i\theta})$

mit $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

Wird von echt rationalen Funktionen in der Nullpunkt abgebildet.

$D_3: G(-i\omega)$

D_1 gespiegelt an reeller Achse.

$D_4: \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(\epsilon e^{i\theta})$

mit $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

Wird meist nach ∞ abgebildet.

ABBILDUNG 12. Nyquist D Kurve

N: Umkreisungen der Nyquistkurve von $F(s)$ des Ursprungs im Urzeigersinn.

Umkreisungen der Nyquistkurve von $G(s)$ des Pkt $-1/K$.

Umkreisungen der Nyquistkurve von $KG(s)$ des Pkt -1 .

9.2.3. Stabilität.

- stabil, wenn:
 - $Z = 0$ oder
 - $N = -P$
- $G(s)$ stabil $\implies -\frac{1}{K}$ nicht umkreist.
- $G(s)$ stabil, P Pole in RHP $\implies -\frac{1}{K}$ umkreist $-P$ Mal.

10. STABILITÄTSMASSE

10.1. Gain Margin und Phase Margin.

Gain Margin:

$$\frac{1}{|KG(j\omega_u)|} \quad \text{bei } \angle G(j\omega_u) = -180^\circ$$

- Faktor, um den die Verstärkung der Strecke vergrößert werden darf, bis Regelkreis "grenz stabil" wird.

Phase Margin:

$$|\angle G(j\omega_c) - 180^\circ| \quad \text{bei } |KG(j\omega_c)| = 1$$

- Betrag, um den die Phase der Strecke reduziert werden muss, damit der Regelkreis "neutral stabil" wird.

- ω_c = crossover frequency
- $0^\circ \leq PM \leq 90^\circ$, Steigung im Bode-Diagramm zwischen $-1 \frac{20\text{dB}}{\text{dec}}$ und $-2 \frac{20\text{dB}}{\text{dec}}$ bei ω_c .

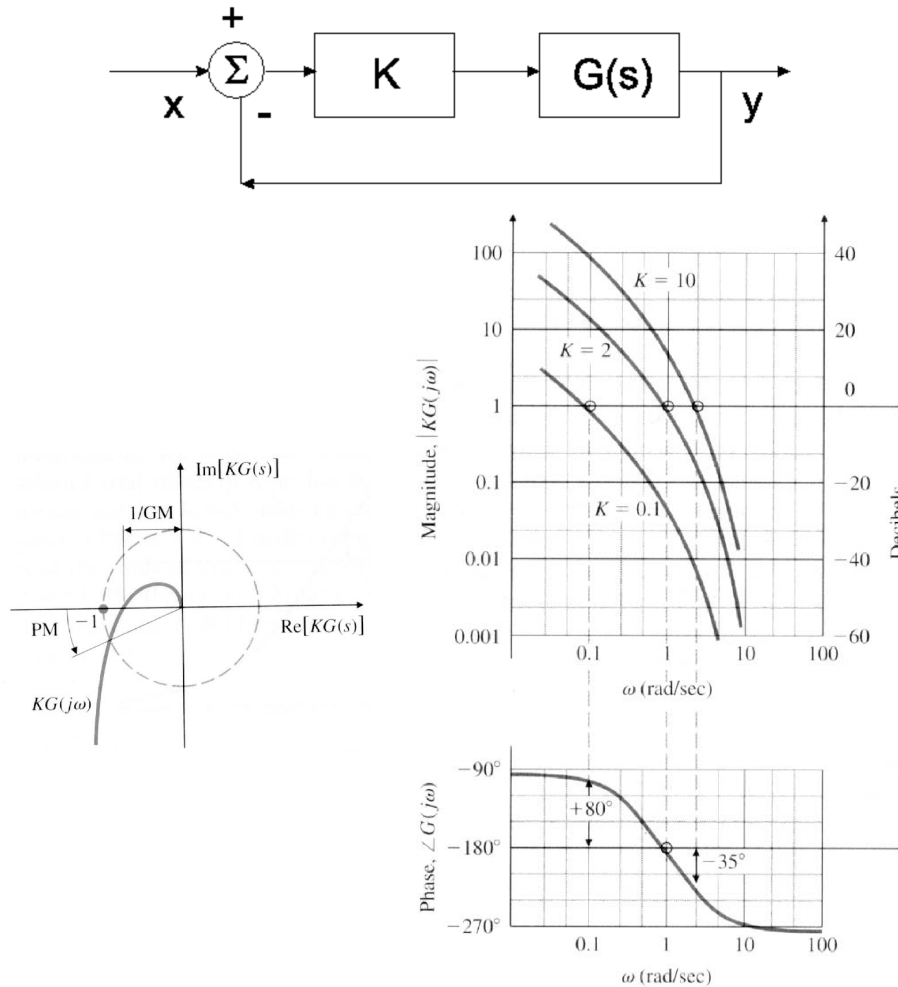


ABBILDUNG 13. Bestimmung der Gain Margin und Phase Margin

10.2. GM und PM als Entwurfskriterien.

Annahme: Geschlossener Regelkreis verhält sich wie System 2. Ordnung.
 \implies System 2. Ordnung (siehe Kapitel 3.5.2, S. 10) dominiert, da restliche Pole / Ns weiter als Fkt 4 entfernt (schneller) sind.

$$T_{cl}(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

$$KG_{ol}(s) = \frac{\omega^2}{s(s + 2\zeta\omega)}$$

$$PM = \tan^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1 + 4\zeta^4} - 2\zeta^2}} \approx 100\zeta$$

$$\zeta \approx \frac{PM}{100}$$

M_p = Überschwingen im Zeitbereich

M_r = Resonanz-Spitze im Frequenzbereich

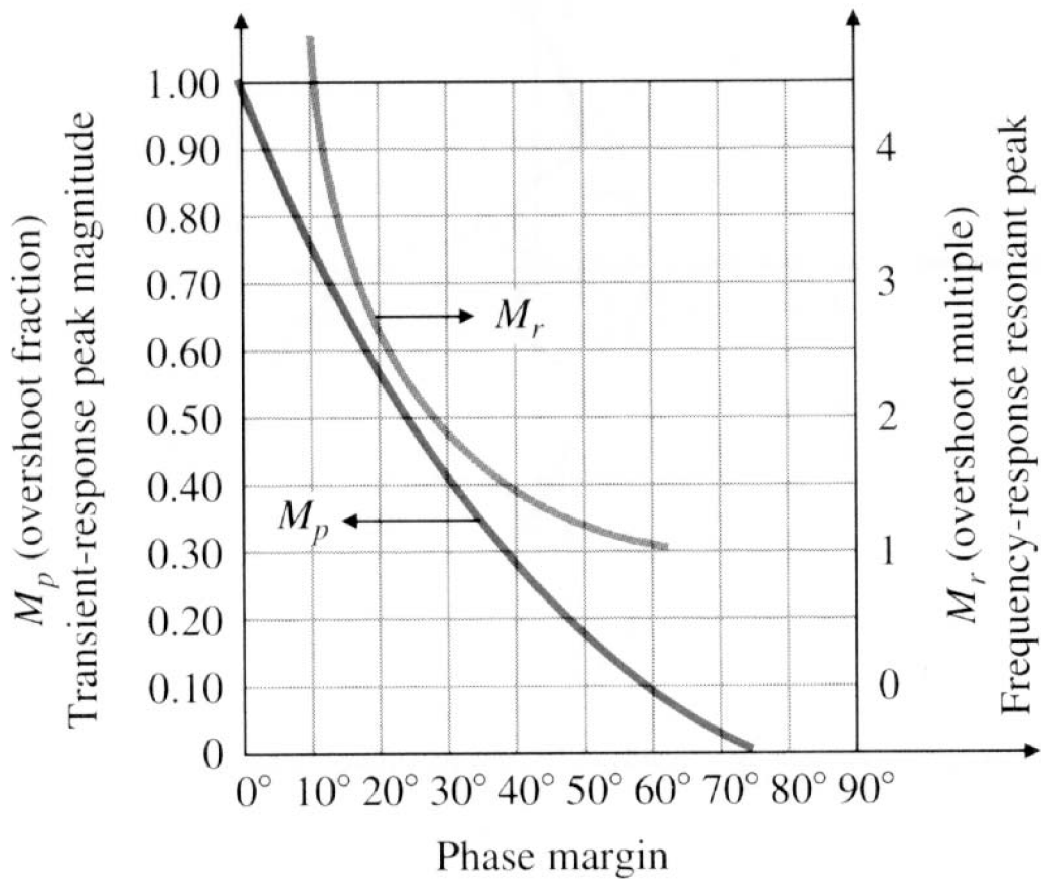


ABBILDUNG 14. Transient-response overshoot and frequency response

10.3. Bode's Betrag / Phase Gesetz.

Für ein stabiles, minimaphasisches System (keine Pole oder Ns in RHE) ist die Phase $\angle G(j\omega)$ eine eindeutige Funktion des Betrages $|G(j\omega)|$.

$$\angle G(j\omega) \iff |G(j\omega)|$$

Spezialfall: Steigung von $|G(j\omega)|$ konstant über etwa eine Dekade:

$$\angle G(j\omega) \approx n \cdot 90^\circ \iff G(s) = s^{-n}$$

\implies für gute PM ($0^\circ < PM < 90^\circ$) sollte Steigung im Bereich von ω_c zwischen -1 und -2 liegen.

11. DYNAMISCHE KOMPENSATION

11.1. PD Kompensation.

$$D(s) = K(T_D s + 1)$$

- PD bietet Phasenvoreilung \rightarrow System wird schneller.
- Wähle $1/T_D$ im Bereich von ω_c um PM zu verbessern.
- Probleme
 - Verstärkung von Messrauschen für hohe Frequenzen.
 - idealer Differentiator nicht realisierbar.
- Alternative: Lead Kompensator

11.2. Lead-Kompensation.

$$D(s) = K \frac{T_s + 1}{\alpha T_s + 1} \quad \alpha < 1$$

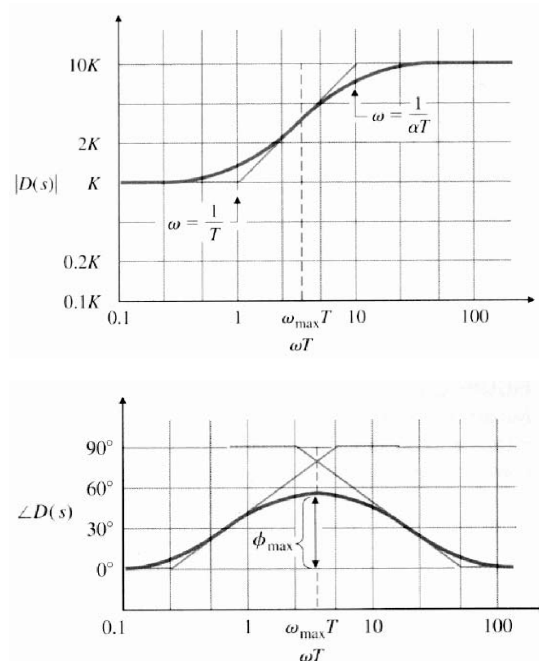


ABBILDUNG 15. Lead-Kompensation

-
-

$$\omega_{max} = \frac{1}{T \sqrt{\alpha}} \iff T = \frac{1}{\sqrt{\alpha} \omega_{max}}$$

$$\alpha = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \iff \sin \phi = \frac{1 - \alpha}{\alpha + 1}$$

- mehr Phasenreserve ($\phi > 60^\circ, \alpha < 0.1$) mit

$$D(s) = K \left(\frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \right)^2$$

- Reglerabweichung

$$e_{ss} = r - y = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{1 + DG} \right] r(s)$$

$$r_{\text{Einheitsrampe}}(s) = \frac{1}{s^2}, r_{\text{Einheitssprung}}(s) = \frac{1}{s}$$

11.3. PI-Kompensation.

$$D(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

- Erhöht Betrag für kleine Frequenzen
- Man wählt $\frac{1}{T_I}$ viel kleiner als ω_c , um Phasenreserve nicht zu beeinflussen. (Phasenverschiebung 0 bei ω_c)

11.4. Lag-Kompensation.

$$D(s) = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad \alpha > 1$$

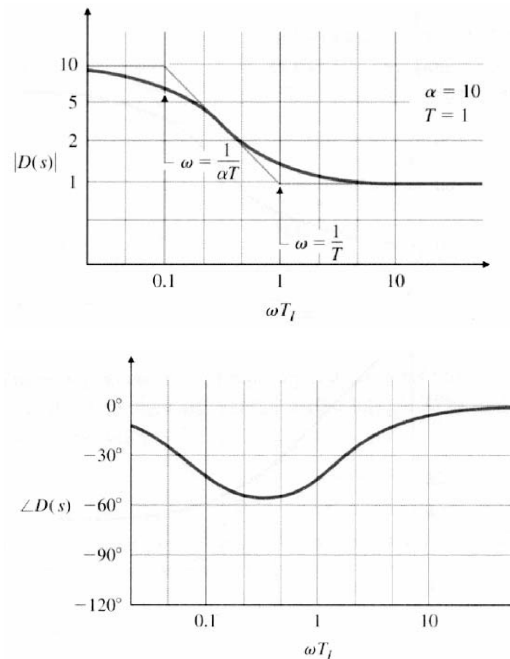


ABBILDUNG 16. Lag-Kompensation

- Zusätzliche Verstärkung um α im niedrigen Frequenzbereich.
- Man wählt $\frac{1}{T}$ viel kleiner als ω_c , um Phasenreserve nicht zu beeinflussen.
- System wird langsamer.

11.5. PID Kompensation.

$$D(s) = \frac{K}{s} \left[(T_D s + 1) \left(s + \frac{1}{T_I} \right) \right]$$

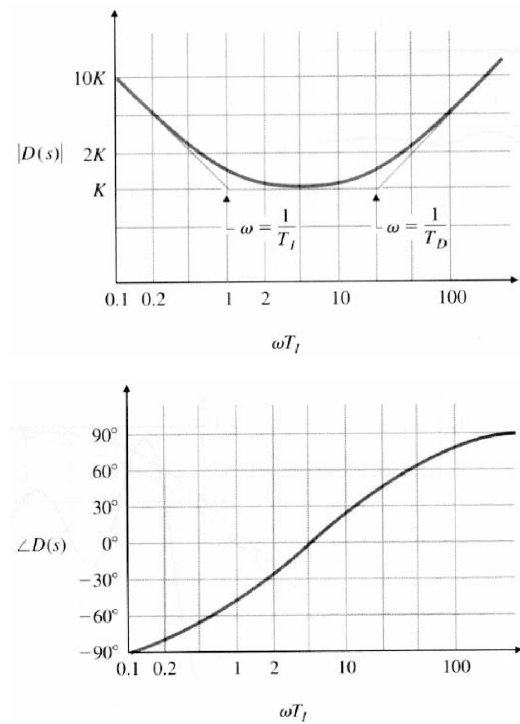
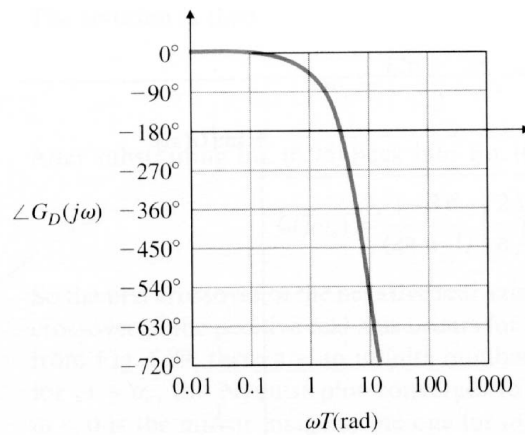


ABBILDUNG 17. PID-Kompensation ($T_I/T_D = 20$)

12. NICHT MINIMALPHASIGE ELEMENTE

12.1. Totzeit.

Verzögert Ausgangssignal um T_d .



Phasenvorschub für $\omega T_d > 4$ zu gross \Rightarrow nicht mehr regelbar.

ABBILDUNG 18. Totzeit

$$G_D(s) = e^{-T_d s}$$

$$\angle G_D(j\omega) = -\omega T_d$$

Für Systeme mit Totzeit ist die erreichbare Bandbreite beschränkt auf etwa

$$\omega \leq \frac{4}{T_d}$$

12.2. Nullstellen in RHE.

Padé-Approximation der Totzeit:

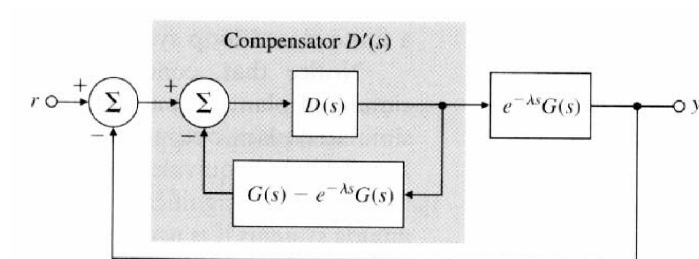
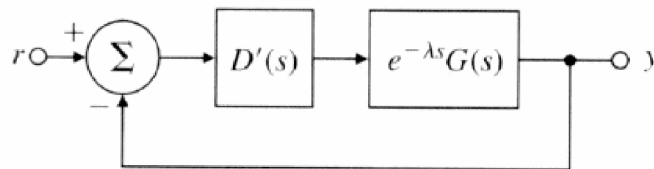
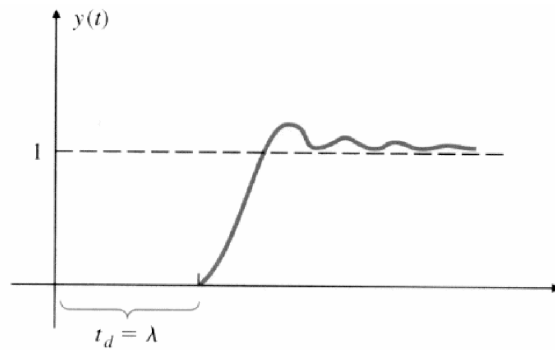
$$e^{-s\theta} = \frac{e^{-s\theta/2}}{e^{+s\theta/2}} = \frac{1 - s\frac{\theta}{2} + \dots}{1 + s\frac{\theta}{2} + \dots}$$

$$\frac{1 - Ts}{1 + Ts}$$

Für Systeme mit einer Nullstelle $\frac{1}{T}$ in der RHE ist die erreichbare Bandbreite beschränkt auf etwa

$$\omega \leq \frac{2}{T}$$

12.3. Totzeitkompensator. Siehe Abbildung 19.



$$\frac{Y}{R} = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)} e^{-\lambda s}$$

ABBILDUNG 19. Totzeitkompensator

13. ERWEITERUNGEN DER REGULINGSSTRUKTUR

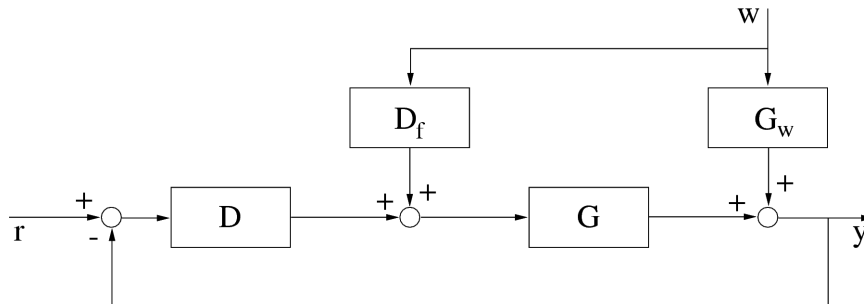


ABBILDUNG 20. Feedforward Control

13.1. Störgrössenaufschaltung (Feedforward Control).

$$y = \frac{DG}{1 + DG}r + \frac{D_f G + G_w}{1 + DG}w$$

$$\implies D_f = -\frac{G_w}{G}$$

Bedingungen

- ω messbar
- G und G_w muss bekannt sein
- D_f realisierbar und stabil:
muss angehähert werden, wenn
 - G Nullstellen in RHE hat. \rightarrow Nullstelle in LHE spiegeln.
 - G eine grössere Totzeit als G_w hat.

13.2. Kaskadenregelung.

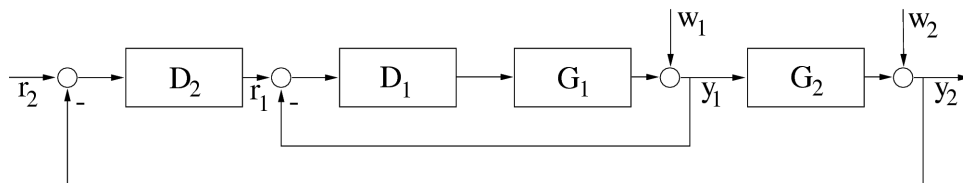


ABBILDUNG 21. Kaskadenregelung

Idee

- Über die Hilfsgrösse y_1 kann die Störung rasch ausgeregelt werden.

Bedingungen

- G_2 muss langsam sein im Vergleich zu G_1 .

Entwurf siehe Abbildung 21

- Entwurf des inneren Reglers D_1 :
regle Störung w_1 aus, muss schnell sein
- Fasse inneren Kreis zusammen
- Entwurf des äusseren Reglers D_2 :
gutes Verhalten von $y_2 \rightarrow y_1 \approx r_1$

14. MEHRVARIABLENREGELUNG

14.1. Kopplungsmass: Relative Gain Array.

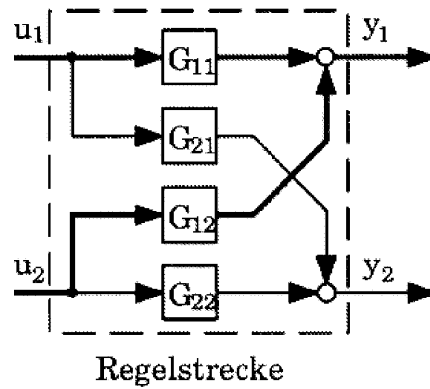


ABBILDUNG 22. Mehrvariablenregelung Allgemein

Allgemein (siehe Abbildung 22)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Relative Gain Array

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad \text{mit } m_{ij} = g_{ij} \hat{g}_{ji}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{g}_{11} & \hat{g}_{12} \\ \hat{g}_{21} & \hat{g}_{22} \end{bmatrix} = G^{-1} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Eigenschaften

- $\sum_j m_{ij} = \sum_i m_{ij} = 1$
- RGA ist skalierungsunabhängig, d.h. wenn $G' = D_0 G D_1$ mit (D_1 und D_0 Systemeingangs, -ausgangs skalierende Diagonalmatrizen), dann

$$M(G) = M(G')$$

14.2. Entkopplungskompensator. Siehe Abbildung 23.

$$y = GHu'; \quad H = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{g_{12}}{g_{11}} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$GH = \begin{bmatrix} g_{11} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{22}} & 0 \\ 0 & g_{22} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}} \end{bmatrix}$$

15. ZUSTANDSRAUMDARSTELLUNG

15.1. Regelungsnormalform.

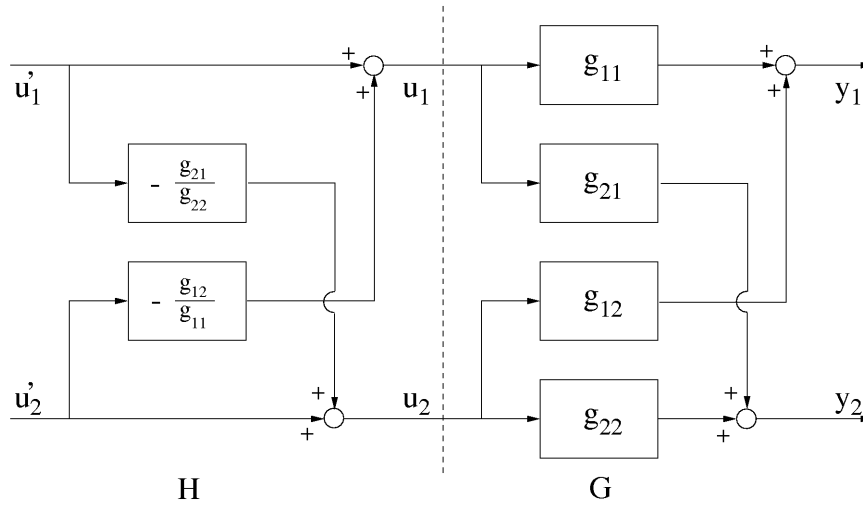


ABBILDUNG 23. Entkopplungskompensator

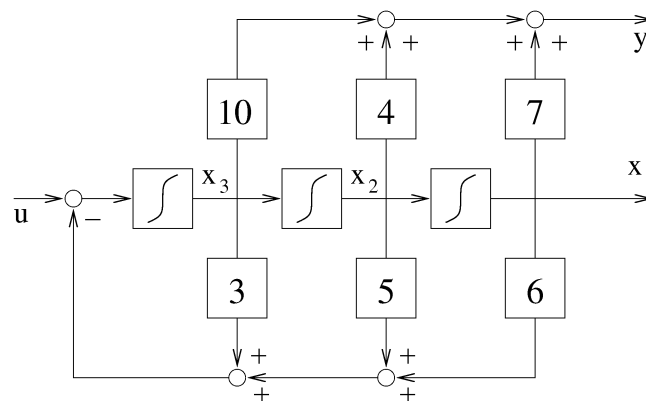
15.1.1. Realisierung.

$$Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}U(s) = \frac{b_1s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{1s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n}U(s)$$

Regelungsnormform

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_n \quad b_{n-1} \quad \dots \quad b_1] x$$



$$G(s) = \frac{10s^2 + 4s + 7}{s^3 + 3s^2 + 5s + 6}$$

ABBILDUNG 24. Regelungsnormform

15.1.2. *Überführung in Regelungsnormalform.*

Finde T so, dass System (F, G, H) in Regelungsnormalform (A_c, B_c, C_c) kommt.

Steuerbarkeitsmatrix:

$$C = [G \quad FG \quad F^2G \quad \dots \quad F^{n-1}G]$$

steuerbar: Ein System ist nur dann steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix nicht singulär ist.

steuerbar \Rightarrow in RNF überführbar

singulär: $\Leftrightarrow \exists C^{-1} \Leftrightarrow \det(C) \neq 0$

Überführung:

(1) Letzte Zeile von C^{-1} :

$$t_1 = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] C^{-1}$$

(2)

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_1 F \\ t_1 F^2 \\ \vdots \\ t_1 F^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$A_c = T^{-1} F T$$

$$C_c = H T$$

15.2. **Beobachternormalform.**15.2.1. *Realisierung.*

$$Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)} U(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{1 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} U(s)$$

Beobachternormalform

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] x$$

15.2.2. *Überführung in Beobachternormalform.*

Finde T so, dass System (F, G, H) in Beobachternormalform (A_O, B_O, C_O) kommt.

Beobachtbarkeitsmatrix:

$$O = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

beobachtbar: $\Leftrightarrow O$ ist nicht singulär

Überführung

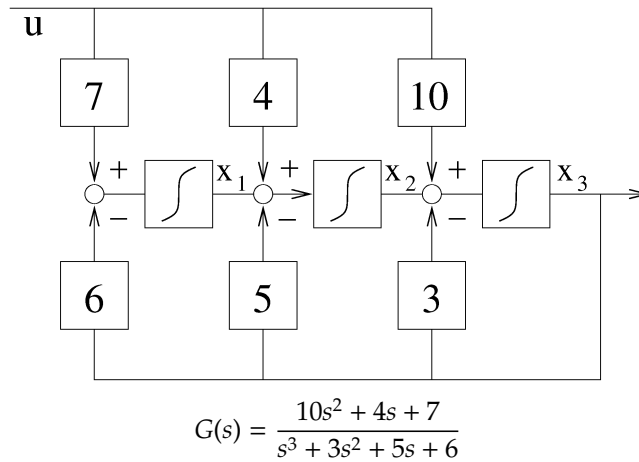


ABBILDUNG 25. Beobachternormalform

- (1) Beobachtbarkeitsmatrix O
- (2) Letzte Spalte von O^{-1}

$$t_1 = O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (3)

$$T = [t_1 \quad Ft_1 \quad F^2t_1 \quad \dots \quad F^{n-1}t_1]$$

- (4)

$$\begin{aligned} A_O &= T^{-1}FT \\ B_O &= T^{-1}G \end{aligned}$$

15.3. Modalform.

15.3.1. Realisierung.

$$G(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \dots$$

Modalform (für PBZ siehe Kapitel 3.3.1, S. 7)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] x \end{aligned}$$

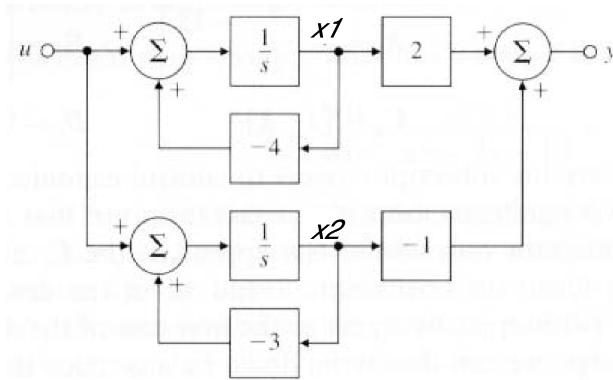
Komplikationen:

Komplexe Pole:

$$G(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} \Rightarrow \text{in Regelungsnormalform}$$

Mehrfache Pole: Jordanform

$$G(s) = \frac{c}{(s - \lambda)^n} \Rightarrow$$



$$G(s) = \frac{2}{s+4} + \frac{-1}{s+3}$$

ABBILDUNG 26. Modalform

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{n \times n} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c \ 0 \ \dots \ 0 \ 0] x$$

Beispiel:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + 2s + 4} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ -1 \ 0] x$$

15.3.2. Überführung in Modalform.

Finde T so, dass System (F, G, H) in Modalform (A_m, B_m, C_m) kommt.

Überführung:

- (1) λ_i : Eigenwert von F

$$\det(F - \lambda \cdot I) = 0$$

- t_i : Eigenvektor von F

$$(F - \lambda \cdot I) \cdot t_i = 0$$

- (2)

$$T = [t_1 \ \dots \ t_n]$$

- (3)

$$\begin{aligned} A_m &= \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \\ B_m &= T^{-1}G \\ C_m &= HT \end{aligned}$$

- $b_i = 0 \Rightarrow$ Zustand x_i ist nicht steuerbar.
- $c_i = 0 \Rightarrow$ Zustand x_i ist nicht beobachtbar.

15.4. Zustandstransformation.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Fx + Gu \\ y &= Hx + Ju\end{aligned}$$

Neuer Zustand z : $x = Tz$

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bu \\ y &= Cz + Du\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}A &= T^{-1}FT \\ B &= T^{-1}G \\ C &= HT \\ D &= J\end{aligned}$$

15.5. Verlust der Steuerbarkeit / Beobachtbarkeit.

Pol / Nullstellenkürzung in $G(s)$

\iff

Verlust der Steuerbarkeit oder Beobachtbarkeit in ZSR

15.6. **Zerlegung nach Kalman.** Durch entsprechende Zustandstransformationen kann jedes System in (nicht) steuerbare, (nicht) beobachtbare Untersysteme zerlegt werden.

15.7. Eigenwerte und Pole.

$$\begin{aligned}Y &= [H(sI - F)^{-1}G + J]U \\ Y &= \left[\frac{1}{\det(sI - F)} H \cdot \text{adj}(sI - F)G + J \right] U \\ \det(sI - F) = 0 &\Rightarrow \text{Eigenwerte von } F\end{aligned}$$

- Alle Pole der ÜF sind EW von F
- nicht alle Eigenwerte von F sind Pole der ÜF!!
(wegen Kürzungen)
- die ÜF ist invariant unter Zustandstransformationen

15.8. Nullstellen in der ZSR.

Bei entsprechenden AB kann ein instabiles u zu $y \equiv 0$ führen!

Nullstellen z der ÜF:

$$\det \begin{bmatrix} zI - F & -G \\ H & J \end{bmatrix} = 0$$

Ansatz:

$$\begin{aligned}u &= u_0 e^{zt} \\ x &= x_0 e^{zt} \\ \dot{x} &= Fx_0 + Gu_0 \\ &\Rightarrow y \equiv 0\end{aligned}$$

16. REGLERENTWURF IM ZUSTANDSRAUM

16.1. Zustandsrückführung.

Idee: $u = -Kx$

$$\dot{x} = (F - GK)x$$

charakteristische Gleichung:

$$\boxed{\det(sI - (F - GK)) = 0}$$

16.1.1. Bei RNF.

$$F = F_c - G_c K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n - k_1 & -a_{n-1} - k_2 & \dots & -a_1 - k_n \end{bmatrix}$$

charakteristische Gleichung:

$$s^n + (a_1 + k_n)s^{n-1} + (a_2 + k_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_n + k_1) = 0$$

⇒ Für ein steuerbares System lassen sich die Pole beliebig verschieben!

16.2. Referenzsystem.

Berücksichtigung eines Sollwertes r bei der Zustandsrückführung. Siehe Abbildung 27.

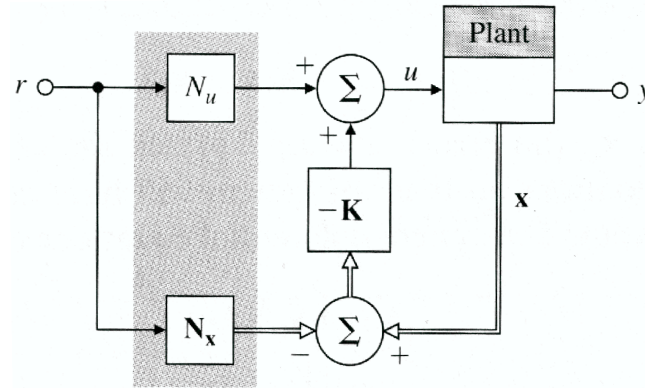


ABBILDUNG 27. Zustandsrückführung

r : Sollwert

$u_{ss} = N_u \cdot r_{ss}$: Eingang im steady-state

$x_{ss} = N_x \cdot r_{ss}$: Zustand im steady-state

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & J \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u = N_u r - K(x - N_x r)$$

$$= -Kx + \underbrace{(N_u + KN_x)}_{\bar{N}} r$$

16.3. Integralregelung.

$$\dot{x} = Fx + Gu$$

$$x_I = Hx - r = e \quad \text{zusätzlicher Zustand für Integralanteil}$$

$$y = Hx$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$u = -[K_1 \quad K_0] \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix}$$

16.4. Zustandsschätzung, Beobachter.

16.4.1. Schätzung \hat{x} von x .

Idee: $u = -K\hat{x} + \bar{N}r$ wobei \hat{x} eine Schätzung von x ist.

Fehler: $\tilde{x} = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{\tilde{x}} = F\tilde{x}$

Fehler hat gleiche Dynamik wie F : eventuell langsam oder instabil!

16.4.2. Fehlerkorrektur mittels Rückführung des Schätzfehlers $y - H\hat{x}$.

Beobachter von x :

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Gu + L(y - H\hat{x})$$

Fehlerdynamik:

$$\dot{\tilde{x}} = (F - LH)\tilde{x}$$

Charakteristische Gleichung:

$$\det[sI - (F - LH)] = 0$$

16.4.3. Wahl von L mit System in BNF.

$$F = F_0 - LH_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_n - l_1 \\ 1 & \dots & 0 & -a_{n-1} - l_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_1 - l_n \end{bmatrix}$$

charakteristische Gleichung:

$$s^n + (a_1 + l_n)s^{n-1} + (a_2 + l_{n-1})s^{n-2} + \dots + (a_n + l_1) = 0$$

Für ein beobachtbares System lassen sich die Pole durch die Wahl von L beliebig verschieben.

Wähle Pole des Beobachters so, dass Realteile doppelten Wert des schnellsten Streckenpols haben.

16.5. Dualität.

Regelung: wähle K so, dass $\lambda_i\{F - GK\}$ "gut".

Steuerung: wähle L so, dass $\lambda_i\{F - LH\}$ "gut".

$$\{H, F\} \text{ beobachtbar} \iff \{F^T, H^T\} \text{ steuerbar}$$

16.6. Zustandsrückführung mit Beobachter. Siehe Abbildung 28.

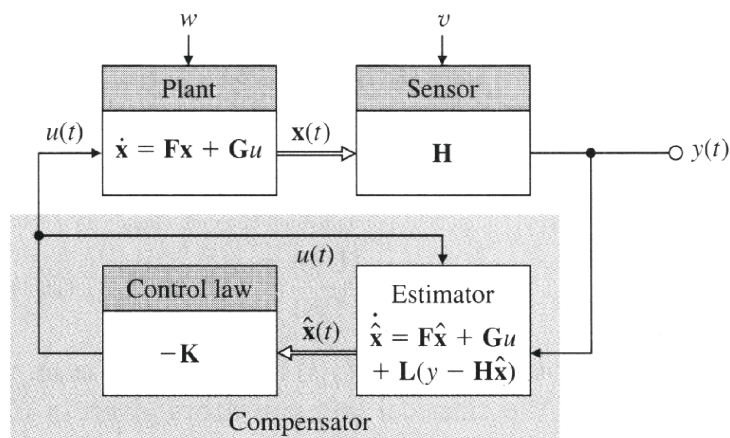


ABBILDUNG 28. Dynamischer Kompensator

Dynamik des Gesamtsystems:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F - GK & GK \\ 0 & F - LH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

charakteristisches Polynom:

$$\det \begin{bmatrix} sI - F + GK & GK \\ 0 & sI - F + LH \end{bmatrix} = \det(sI - F + GK) \cdot \det(sI - F + LH) = 0$$

Übertragungsfunktion des Kompensators:

$$D_{\text{Kompensator}} = \frac{U(s)}{Y(s)} = -K(sI - F + GK + LH)^{-1}L$$

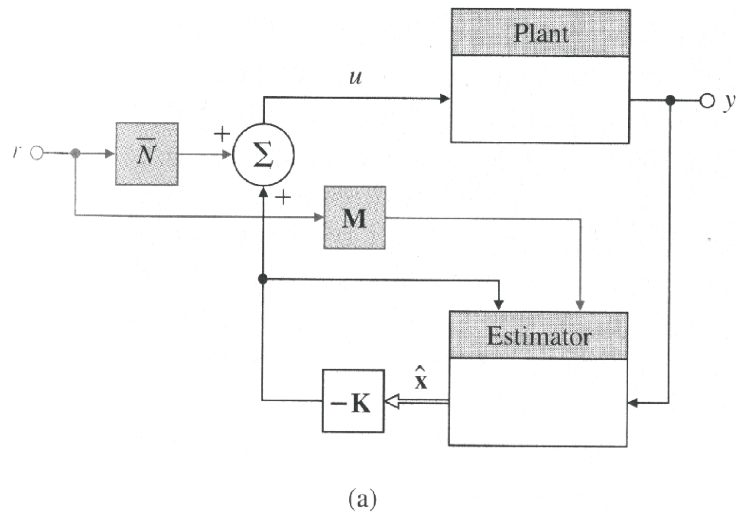


ABBILDUNG 29. Referenzsystem

16.7. **Referenzsystem.** Siehe Abbildung 29.

16.8. **LQ-Regulator.** Minimierung der Gütefunktion $J(u)$:

$$J(u) = \underbrace{x^T(t_1)P_{t_1}x(t_1)}_{\text{Fehler bei } t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{[x^T(t)Q(t)x(t)]}_{\text{Fehler}^2} + \underbrace{u^T R(t)u(t)}_{u^2} dt$$

$P(t)$: Gewichtung des Fehlers bei t_1 .

- $P_{t_1} = P(t_1)$
- P positiv semi-definit und symmetrisch

$Q(t)$: Gewichtung des Fehlers.

- Q positiv semi-definit $\forall t$

$R(t)$: Gewichtung der Stellgrösse.

- R positiv definit $\forall t$
- grosse Stellgrösse \rightarrow kleiner Fehler, nicht implementierbar
- kleine Stellgrösse \rightarrow grosser Fehler, unerwünscht

positiv definit: $v^T A v > 0 \quad \forall v \neq 0$

- nur positive Diagonalelemente, Eigenwerte
- A invertierbar, A^{-1} auch positiv definit

Lösung:

$$u(t) = -K(t)x(t)$$

$$= -R^{-1}(t)G^T(t)P(t)x(t)$$

$$\dot{P}(t) = 0 = -F^T(t)P(t) - P(t)F(t) + P(t)G(t)R(t)^{-1}G^T(t)P(t) - Q(t)$$

$$J(u)_{\min} = x_0^T P(t_0) x_0$$

Die Lösung ist vernünftig, wenn:

- die Regelstrecke asymptotisch stabil ist oder
- das System vollständig steuerbar ist oder
- das System stabilisierbar ist.